CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR

(Durée : 1 h 30 - coefficient : 3) ANNÉE 1985

EPREUVE DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Les deux exercices sont indépendants, la rigueur et la présentation joueront un rôle important dans la notation.

I. La notation ln(n) désigne le logarithme népérien de n.
On considère la série harmonique de terme général $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geqslant 1}$.
On désigne par $(s_n)_{n \geqslant 1}$ la suite de ses sommes partielles :

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

1°) Prouver que pour tout entier $k \geqslant 2$, $k \in \mathbb{N}$

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$$

En déduire $\ln(n) \leqslant s_n \leqslant 1 + \ln(n)$.

2°) Pour tout entier $k \geqslant 2$, on pose :

$$w_k = \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t} - \frac{1}{k}$$

Montrer que :

$$w_k = \int_{k-1}^{k} \frac{t - k + 1}{t^2}\, dt$$

En déduire que la série de terme général (w_k) converge. On désigne par $(U_n)_{n \geqslant 1}$ la suite de terme général $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n)$.
Déduire des questions précédentes que cette suite converge. On appelle "constante d'Euler" sa limite que l'on note γ. Montrer que $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.
Améliorer ce résultat en montrant que $\frac{1}{2} \leqslant \gamma \leqslant 1$.

On pourra remarquer qu'en définissant les points $A_{n-1}(n-1, \frac{1}{n-1})$ et $A_n(n, \frac{1}{n})$, le segment $\left]\, A_{n-1}, A_n \right[$ est situé strictement au dessus du graphe de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur $\left]\, n-1, n \right[$.

3°) On pose $s_n = \ln(n) + \gamma + r_n$ où $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k$.

Montrer que $0 \leqslant r_n \leqslant \frac{1}{n}$.

4°) On veut démontrer l'existence de constantes a,b,c telles que

$$r_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) .$$

On montrera que :

$$w_k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2}\right) + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u(1-u)\ (1-2u)}{(u+k-1)^4}\ du$$

et $$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u(1-u)(1-2u)}{(u+k-1)^4}\ du = \int_0^1 \frac{u^2(1-u)^2}{(u+k-1)^5}\ du .$$

En déduire que :

$$0 \leqslant r_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} \leqslant \frac{1}{16}\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^5} .$$

Trouver alors les constantes a,b,c.

5°) On pose $V_n = U_n - \frac{a}{n} - \frac{b}{n^2} - \frac{c}{n^3}$.

Vérifier que :

$$0 \leqslant V_n - \gamma \leqslant \frac{1}{64n^4} .$$

Combien de termes en $\frac{1}{k}$ doit-on calculer pour obtenir une valeur approchée de γ à la précision 10^{-6} ? Montrer que V_{100} permet d'obtenir une valeur approchée de γ à la précision 10^{-8}.

On donne $V_{100} = 0{,}577215666$.

Calculer alors γ.

II. $M_{\mathbb{R}}(n)$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients

dans $\mathbb{R}$. Soit la matrice de $M_{\mathbb{R}}(n)$:

$$A = (a_{ij}) \text{ avec } \begin{cases} a_{ii} = i & 1 \leqslant i \leqslant n \\ a_{ij} = 1 & i \neq j \\ & 1 \leqslant i \leqslant n \\ & 1 \leqslant j \leqslant n \end{cases}$$

1°) Montrer que la matrice A est diagonalisable dans $M_{\mathbb{R}}(n)$.

2°) Démontrer la proposition suivante :

λ est valeur propre de $A \iff \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \ldots + \frac{1}{\lambda-n+1} = 1$

En déduire que les n valeurs propres de A sont toutes réelles et distinctes et qu'elles appartiennent à chacun des intervalles :

$]0,1[$, $]1,2[$,....., $]n-2, n-1[$

et $]n-1, +\infty[$.

3°) Dans le cas de $n = 4$, calculer à 10^{-4} près les quatre valeurs propres de A.